时间测度链上一类三阶动力方程的振动准则*

张晓建，杨甲山
（邵阳学院理学与信息科学系，湖南 邵阳 422004）

摘 要：研究了时间测度链上的一类具有非线性中立项的三阶非线性变时滞动力方程的振动性，运用 Riccati 变换技术，结合大量不等式技巧，得到了该方程的几个新的振动准则，这些准则推广和改进了现有文献的一些已知结果，并以具体例子来说明。

关键词：振动性；时滞动力方程；Riccati 变换；时间测度链
中图分类号：O175. 7 **文献标志码**：A **文章编号**：0529 - 6579（2013）04 - 0029 - 05

Oscillation Criteria for Certain Third-Order Dynamic Equations on Time Scales

ZHANG Xiaojian, *YANG Jiashan*
（Department of Science and Information, Shaoyang University, Shaoyang 422004, China）

Abstract: The oscillation for certain third-order nonlinear variable delay dynamic equations with nonlinear neutral term on time scales is discussed. By using the generalized Riccati transformation and a lot of inequality techniques, some new oscillation criteria for the equations are established. Some known results are extended and improved. Examples are given to illustrate the main results.

Key words: oscillation; delay dynamic equations; Riccati transformation; time scales

近年来时间测度链上动力方程有关理论的研究引起了国内外学术界的广泛兴趣和高度关注[1-13]。本文考虑下面的时间测度链上一类非常广泛的具有非线性中立项的三阶非线性变时滞动力方程

$$\{r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})\}^{\Delta} + P(t)F(\phi(x(\delta(t)))) = 0, t \in T, t \geqslant t_0 \quad (1)$$

这里 $y(t) = x(t) + B(t)g(x(\tau(t)))$，$T$ 为任意时间测度链；$\phi(u) = |u|^{\lambda-1}u$，$\lambda \geqslant 1$ 为实常数；$r(t), a(t), B(t), P(t) \in C_{rd}(T, \mathbf{R})$；$\tau(t), \delta(t)$ 均为定义在 T 到 T 上的滞量函数；$g(u), F(u) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$，且 $ug(u) > 0 (u \neq 0)$，$uF(u) > 0 (u \neq 0)$。

关于时间测度链上的分析理论和时间测度链上动力方程的基本理论可参阅文献［1］。在本文中，讨论的是方程解的振动性，所以总假设时间测度链 T 是无界的：$\sup T = +\infty$。设 $t_0 \in T$ 且 $t_0 > 0$，定义时间测度链区间 $[t_0, +\infty)_T = [t_0, +\infty) \cap T$。方程（1）的解是指定义在 T 上满足方程（1）的非平凡实值函数 $x(t), t \in T$。方程（1）的解 $x(t)$ 称为振动的，如果 $x(t)$ 既不最终为正，也不最终为负。否则，称为非振动的。方程（1）称为振动的，如果它的所有解都是振动的。本文仅关注方程（1）的不最终恒为零的解，并总假设下列条件成立：

（H_1）$\tau(t) \leqslant t$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t) = +\infty$；$\delta(t) \leqslant t$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\delta(t) = +\infty$。

（H_2）$0 \leqslant B(t) \leqslant 1$；$P(t) > 0$；$r(t) > 0$，$r^{\Delta}(t) \geqslant 0$；$a(t) > 0$，$a^{\Delta}(t) \geqslant 0$。

* **收稿日期**：2012 - 09 - 11
基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（12JJ6006）；湖南省科技厅基金资助项目（2012FJ3107）
作者简介：张晓建（1964 年生），女；**通讯作者**：杨甲山；E-mail：syxyyjs@163. com

（H_3）存在常数 $0<\beta\leqslant 1$ 和 $L>0$，使得 $\dfrac{g(u)}{u}\leqslant\beta(u\neq 0)$，$\dfrac{F(u)}{u}\geqslant L(u\neq 0)$。

（H_4）$\int_{t_0}^{+\infty}\dfrac{1}{[r(s)]^{1/\lambda}}\Delta s=+\infty$，$\int_{t_0}^{+\infty}\dfrac{1}{a(s)}\Delta s=+\infty$。

关于方程（1）的特殊情形，已有文献作过研究[2-6]，本文的目的是研究方程（1）的振动性，改善对方程的条件限制，得到了该方程振动的几个新的充分条件，推广并改进了现有文献中的某些结果。

1 几个基本引理

引理 1[1] 若 $x(t)$ 是 Δ 可微的且最终为正或最终为负，则

$$((x(t))^{\lambda})^{\Delta}=\lambda\int_0^1[hx^{\sigma}+(1-h)x]^{\lambda-1}x^{\Delta}(t)\,\mathrm{d}h \tag{2}$$

引理 2[7] 设下面的条件成立：

(i) $u\in C_{rd}^2(I,\mathbf{R})$，其中 $I=[t^*,+\infty)$，$t^*>0$；(ii) $u(t)>0$，$u^{\Delta}(t)>0$，$u^{\Delta\Delta}(t)\leqslant 0$，$t\geqslant t^*$，则对每一个 $k\in(0,1)$，存在一个常数 $t_k\in T$，$t_k>t^*$，有 $u(\sigma(t))\leqslant\dfrac{\sigma(t)u(\delta(t))}{k\delta(t)}(t\geqslant t_k)$。

引理 3 设 $x(t)$ 是方程（1）的一个最终正解，则 $\exists t_1\in[t_0,+\infty)_T$，当 $t\in[t_1,+\infty)_T$ 时，只有下列两种情况：

(i) $y(t)>0$，$y^{\Delta}(t)>0$，$[a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta}>0$，$\{r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})\}^{\Delta}<0$；

(ii) $y(t)>0$，$y^{\Delta}(t)<0$，$[a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta}>0$，$\{r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})\}^{\Delta}<0$。

证明完全类似于［4］中的引理 2.1，在此从略。

引理 4[8] 设 a,b 为非负实数，则 $rab^{r-1}-a^r\leqslant(r-1)b^r$，$r>1$，等号成立当且仅当 $a=b$。

引理 5[9] 设 $u(t)$ 满足 $u(t)>0$，$u^{\Delta}(t)>0$，$u^{\Delta\Delta}(t)>0$，$u^{\Delta\Delta\Delta}(t)<0$，则 $\liminf\limits_{t\to+\infty}\dfrac{tu(t)}{h_2(t,t_0)u^{\Delta}(t)}\geqslant 1$，这里的 Taylor 单项式 $h_n(t,t_0)$ 定义为 $h_0(t,t_0)=1$，$h_{n+1}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}h_n(s,t_0)\Delta s$，$n\geqslant 0$，$t\in T$。

引理 6 设 $x(t)$ 是方程（1）的满足引理 3 情形（ii）的一个正解，如果

$$\int_{t_0}^{+\infty}P(s)\Delta s=+\infty \tag{3}$$

或者

$$\int_{t_0}^{+\infty}P(s)\Delta s<+\infty,$$
$$\int_{t_0}^{+\infty}\left[\frac{1}{a(v)}\int_v^{+\infty}\left(\frac{1}{r(u)}\int_u^{+\infty}P(s)\Delta s\right)^{1/\lambda}\Delta u\right]\Delta v=+\infty \tag{3$'$}$$

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

证明 因为 $x(t)$ 是方程（1）的满足引理 3 情形（ii）的一个解，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=c\geqslant 0$。假设 $c>0$，由（2）式知，$y(t)\leqslant x(t)+\beta B(t)x(\tau(t))$。由于 $0\leqslant\beta B(t)\leqslant 1$，故 $\exists t_2\geqslant t_1$，使得 $x(\delta(t))\geqslant c/2$，$t\in[t_2,+\infty)_T$。由（1）得

$$\begin{aligned}&\{r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})\}^{\Delta}=\\&-P(t)F(\phi(x(\delta(t))))\leqslant\\&-LP(t)(x(\delta(t)))^{\lambda}<0\end{aligned} \tag{4}$$

所以

$$\begin{aligned}&\{r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})\}^{\Delta}\leqslant\\&-LP(t)(x(\delta(t)))^{\lambda}\leqslant-L\left(\frac{c}{2}\right)^{\lambda}P(t)\end{aligned} \tag{5}$$

若（3）成立，则对（5）式两边从 t_2 到 t（$t\in[t_2,+\infty)_T$）积分，得

$$\begin{aligned}&r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})\leqslant\\&r(t_2)\phi([a(t_2)y^{\Delta}(t_2)]^{\Delta})-\\&L\left(\frac{c}{2}\right)^{\lambda}\int_{t_2}^{t}P(s)\Delta s\to-\infty\ (t\to+\infty)\end{aligned}$$

这与 $[a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta}>0$ 矛盾。所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$。由于 $0<x(t)\leqslant y(t)$，故 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

若（3）$'$成立，则对（5）式两边从 t 到 T（$T\geqslant t,T,t\in[t_2,+\infty)_T$）积分，并令 $T\to+\infty$，得 $r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})\geqslant L\left(\dfrac{c}{2}\right)^{\lambda}\int_t^{+\infty}P(s)\Delta s$，即

$$[a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta}\geqslant L^{\frac{1}{\lambda}}\frac{c}{2}\left(\frac{1}{r(t)}\int_t^{+\infty}P(s)\Delta s\right)^{1/\lambda},t\in$$

$[t_2,+\infty)_T$。进一步得

$$y^{\Delta}(t)\leqslant-L^{\frac{1}{\lambda}}\frac{c}{2}\frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty}\left(\frac{1}{r(u)}\int_u^{+\infty}P(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\lambda}}\Delta u$$

上式两边从 t_2 到 t（$t\in[t_2,+\infty)_T$）积分，得

$$\begin{aligned}&y(t)\leqslant y(t_2)-\\&L^{\frac{1}{\lambda}}\frac{c}{2}\int_{t_2}^{t}\left[\frac{1}{a(v)}\int_v^{+\infty}\left(\frac{1}{r(u)}\int_u^{+\infty}P(s)\Delta s\right)^{1/\lambda}\Delta u\right]\cdot\\&\Delta v\to-\infty\ (t\to+\infty)\end{aligned}$$

这与 $y(t)>0$ 矛盾。所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$，进而 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。引理证毕。

鉴于此，以下均假设（3）或（3）$'$之一是成立的。

2 主要结果和证明

定理 1 如果存在函数 $\varphi(t) \in C_{rd}^1(T,(0,+\infty))$ 且 $\varphi^{\Delta}(t) \geq 0$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left\{\varphi(\sigma(s))\Psi(s) - \frac{k^{-\lambda^2}r(s)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\cdot\left[\frac{\varphi^{\Delta}(s)}{\varphi(s)}\right]^{\lambda+1}\left[\frac{\varphi(s)\sigma(s)}{\delta(s)}\right]^{\lambda^2}\right\}\Delta s = +\infty \qquad (6)$$

这里 $\Psi(t) = \dfrac{Lk^{\lambda}P(t)[1-\beta B(\delta(t))]^{\lambda}[h_2(\delta(t),t_0)]^{\lambda}}{2^{\lambda}[a(\delta(t))\sigma(t)]^{\lambda}}$，则方程（1）的所有解 $x(t)$ 在 $[t_0,+\infty)_T$ 上或者是振动的或者 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

证明 不失一般性，设方程（1）在 $[t_0,+\infty)_T$ 上有一个最终正解 $x(t)$，则 $\exists t_1 \in [t_0,+\infty)_T$，当 $t \in [t_1,+\infty)_T$ 时，有 $x(t)>0$，$x(\tau(t))>0$，$x(\delta(t))>0$。若 $x(t)$ 满足引理 3 的情形（ii），则由引理 6，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$；若 $x(t)$ 满足情形（i），则由 $x(t)\leq y(t)$，得 $y(t)\leq x(t)+\beta B(t)x(\tau(t))\leq x(t)+\beta B(t)y(\tau(t))\leq x(t)+\beta B(t)y(t)$，即

$$[1-\beta B(t)]y(t)\leq x(t) \qquad (7)$$

定义广义的 Riccati 变换

$$V(t) = \varphi(t)\frac{r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})}{\phi(a(t)y^{\Delta}(t))} = \varphi(t)\frac{r(t)[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\Delta}]^{\lambda}}{(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}},\ t\in[t_1,+\infty)_T \qquad (8)$$

则 $V(t)>0$ ($t\in[t_1,+\infty)_T$)，注意到（4），（8）式，进一步可得

$$V^{\Delta}(t) = \varphi^{\Delta}(t)\frac{r(t)\phi([a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta})}{\phi(a(t)y^{\Delta}(t))} + \varphi(\sigma(t))\frac{\{r(t)[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\Delta}]^{\lambda}\}^{\Delta}(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}}{(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}(a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t)))^{\lambda}} - \frac{r(t)[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\Delta}]^{\lambda}[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}]^{\Delta}}{(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}(a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t)))^{\lambda}} \leq$$
$$\frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}V(t) - \varphi(\sigma(t))\left\{\frac{LP(t)(x(\delta(t)))^{\lambda}}{(a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t)))^{\lambda}} + \frac{r(t)[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\Delta}]^{\lambda}[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}]^{\Delta}}{(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}(a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t)))^{\lambda}}\right\} \qquad (9)$$

令 $u(t)=a(t)y^{\Delta}(t)$，则由引理 3 的（i），得 $u(t)>0, u^{\Delta}(t)>0$，由

$$\{r(t)[a(t)y^{\Delta}(t)]^{\Delta}\}^{\Delta} = \{r(t)u^{\Delta}(t)\}^{\Delta} = r^{\Delta}(t)u^{\Delta}(\sigma(t)) + r(t)u^{\Delta\Delta}(t) < 0$$

得 $u^{\Delta\Delta}(t)<0$。于是由引理 2，$\forall k\in(0,1)$，$\exists t_2 \in [t_1,+\infty)_T$ 且 $t_2 \geq \max\{t_k,t_1\}$，当 $t\in[t_2,+\infty)_T$ 时，有 $u(\sigma(t)) \leq \dfrac{\sigma(t)u(\delta(t))}{k\delta(t)} \leq \dfrac{\sigma(t)u(t)}{k\delta(t)}$，所以

$$a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t)) \leq \frac{\sigma(t)a(\delta(t))y^{\Delta}(\delta(t))}{k\delta(t)} \leq \frac{\sigma(t)a(t)y^{\Delta}(t)}{k\delta(t)} \qquad (10)$$

由（2）式，得 $[(u(t))^{\lambda}]^{\Delta} \geq \lambda\int_0^1[hu+(1-h)u]^{\lambda-1}u^{\Delta}(t)dh = \lambda(u(t))^{\lambda-1}u^{\Delta}(t)$，于是

$$[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda}]^{\Delta} \geq \lambda(a(t)y^{\Delta}(t))^{\lambda-1}(a(t)y^{\Delta}(t))^{\Delta} \qquad (11)$$

将（7），（10），（11）式代入（9）式，得

$$V^{\Delta}(t) \leq \frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}V(t) - \varphi(\sigma(t))\cdot\left\{\frac{LP(t)[1-\beta B(\delta(t))]^{\lambda}(y(\delta(t)))^{\lambda}}{(a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t)))^{\lambda}} - \frac{\lambda(k\delta(t))^{\lambda}r(t)[(a(t)y^{\Delta}(t))^{\Delta}]^{\lambda+1}}{(\sigma(t))^{\lambda}[a(t)y^{\Delta}(t)]^{\lambda+1}}\right\} \leq$$
$$\frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}V(t) - \varphi(\sigma(t))\frac{LP(t)[1-\beta B(\delta(t))]^{\lambda}(y(\delta(t)))^{\lambda}}{(a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t)))^{\lambda}} - \frac{\lambda k^{\lambda}\delta^{\lambda}(t)[V(t)]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{[r^{1/\lambda^2}(t)\varphi(t)\sigma(t)]^{\lambda}} \qquad (12)$$

另一方面，令 $U(t) = \int_{t_1}^{t}a(s)y^{\Delta}(s)\Delta s$，则由（i）易得 $U(t)>0, U^{\Delta}(t)>0, U^{\Delta\Delta}(t)>0, U^{\Delta\Delta\Delta}(t)<0$。于是由引理 5，存在 $t_{1/2}\in[t_1,+\infty)_T$，使得当 $t\in[t_{1/2},+\infty)_T$ 时，有 $\dfrac{tU(t)}{h_2(t,t_0)U^{\Delta}(t)} \geq \dfrac{1}{2}$，即

$$\frac{\int_{t_1}^{t}a(s)y^{\Delta}(s)\Delta s}{a(t)y^{\Delta}(t)} \geq \frac{h_2(t,t_0)}{2t},\ t\in[t_{1/2},+\infty)_T$$

又因为 $\int_{t_1}^{t}a(s)y^{\Delta}(s)\Delta s = a(t)y(t) - a(t_1)y(t_1) - \int_{t_1}^{t}a^{\Delta}(s)y(\sigma(s))\Delta s$，所以 $a(t)y(t)\geq\int_{t_1}^{t}a(s)y^{\Delta}(s)\Delta s$。注意到上式，得

$$\frac{y(t)}{y^{\Delta}(t)} = \frac{a(t)y(t)}{a(t)y^{\Delta}(t)} \geq \frac{\int_{t_1}^{t}a(s)y^{\Delta}(s)\Delta s}{a(t)y^{\Delta}(t)} \geq \frac{h_2(t,t_0)}{2t},\ t\in[t_{1/2},+\infty)_T \qquad (13)$$

因此，由（10），（13）式，$\exists T_0\in[t_0,+\infty)_T$ 且 $T_0\geq\max\{t_2,t_{1/2}\}$，使得当 $t\in[T_0,+\infty)_T$ 时，有

$$\frac{y(\delta(t))}{a(\sigma(t))y^{\Delta}(\sigma(t))} \geq \frac{1}{a(\sigma(t))}\frac{h_2(\delta(t),t_0)}{2\delta(t)}\cdot\frac{k\delta(t)a(\sigma(t))}{\sigma(t)a(\delta(t))} = \frac{kh_2(\delta(t),t_0)}{2a(\delta(t))\sigma(t)}$$

将上式代入（12）式，得

$$\varphi(\sigma(t))\Psi(t)\leqslant -V^{\Delta}(t)+\frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}V(t)-\frac{\lambda k^{\lambda}\delta^{\lambda}(t)}{[r^{1/\lambda^2}(t)\varphi(t)\sigma(t)]^{\lambda}}[V(t)]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\qquad(14)$$

现取

$$r=\frac{\lambda+1}{\lambda},a=\lambda^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\left[\frac{k\delta(t)}{r^{1/\lambda^2}(t)\varphi(t)\sigma(t)}\right]^{\frac{\lambda 2}{\lambda+1}}V(t),$$

$$b=\frac{\lambda^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}}{(\lambda+1)^{\lambda}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}\right]^{\lambda}\left[\frac{k\delta(t)}{r^{1/\lambda^2}(t)\varphi(t)\sigma(t)}\right]^{\frac{-\lambda 3}{\lambda+1}}$$

代入引理4中的不等式，得

$$\frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}V(t)-\frac{\lambda k^{\lambda}\delta^{\lambda}(t)}{[r^{1/\lambda^2}(t)\varphi(t)\sigma(t)]^{\lambda}}[V(t)]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\leqslant \frac{k^{-\lambda^2}r(t)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}\right]^{\lambda+1}\left[\frac{\varphi(t)\sigma(t)}{\delta(t)}\right]^{\lambda^2}$$

将其代入（14）式，得

$$\varphi(\sigma(t))\Psi(t)\leqslant -V^{\Delta}(t)+\frac{k^{-\lambda^2}r(t)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(t)}{\varphi(t)}\right]^{\lambda+1}\left[\frac{\varphi(t)\sigma(t)}{\delta(t)}\right]^{\lambda^2}\qquad(15)$$

两边积分，得

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(\sigma(s))\Psi(s)\Delta s\leqslant -V(t)+V(T_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{k^{-\lambda^2}r(s)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(s)}{\varphi(s)}\right]^{\lambda+1}\left[\frac{\varphi(s)\sigma(s)}{\delta(s)}\right]^{\lambda^2}\Delta s$$

所以

$$\int_{t_0}^{t}\left\{\varphi(\sigma(s))\Psi(s)-\frac{k^{-\lambda^2}r(s)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(s)}{\varphi(s)}\right]^{\lambda+1}\cdot\left[\frac{\varphi(s)\sigma(s)}{\delta(s)}\right]^{\lambda^2}\right\}\Delta s\leqslant -V(t)+V(T_0)\leqslant V(T_0)$$

上式取上极限，得与（6）式矛盾！定理证毕。

注1 选择恰当的不同的函数 $\varphi(t)$，就能得到方程（1）的许多不同的具体振动准则。例如，可以选取 $\varphi(t)=t$ 或 $\varphi(t)=M$ 等。现在定理1中取 $\varphi(t)=M$（$M>0$ 为常数），则得

推论1 如果 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{[1-\beta B(\delta(s))]^{\lambda}[h_2(\delta(s),t_0)]^{\lambda}}{[a(\delta(s))\sigma(s)]^{\lambda}}\cdot P(s)\Delta s=+\infty$，则方程（1）的所有解 $x(t)$ 在 $[t_0,+\infty)_T$ 上或者是振动的或者 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

为了叙述方便，考虑集合 $D=\{(t,s):t\geqslant s\geqslant t_0,t,s\in T\}$，我们称函数 $H\in\Omega$，如果函数 $H(t,s)\in C_{rd}(D,R)$，当 $t\geqslant t_0$ 时 $H(t,t)=0$；当 $t>s$ 时 $H(t,s)>0$ 且 $H(t,s)$ 有连续且非正的偏导数，即 $H_s^{\Delta}(t,s)\in C_{rd}$ 且 $H_s^{\Delta}(t,s)\leqslant 0$。

定理2 如果存在函数 $H\in\Omega$ 及 $\varphi(t)\in C_{rd}^1(T,(0,+\infty))$ 且 $\varphi^{\Delta}(t)\geqslant 0$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\cdot\left\{\varphi(\sigma(s))\Psi(s)-\frac{k^{-\lambda^2}r(s)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(s)}{\varphi(s)}\right]^{\lambda+1}\cdot\left[\frac{\varphi(s)\sigma(s)}{\delta(s)}\right]^{\lambda^2}\right\}\Delta s=+\infty\qquad(16)$$

这里 $T_0\geqslant t_0$ 为常数，$\Psi(t)=\frac{Lk^{\lambda}P(t)[1-\beta B(\delta(t))]^{\lambda}[h_2(\delta(t),t_0)]^{\lambda}}{2^{\lambda}[a(\delta(t))\sigma(t)]^{\lambda}}$，则方程（1）的所有解 $x(t)$ 在 $[t_0,+\infty)_T$ 上或者是振动的或者 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

证明 同定理1，只需证明 $x(t)$ 满足引理3中的情形（i）即可。由定理1的证明可得（15）式，即当 $s\in[T_0,+\infty)_T$ 时，有

$$\varphi(\sigma(s))\Psi(s)-\frac{k^{-\lambda^2}r(s)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(s)}{\varphi(s)}\right]^{\lambda+1}\cdot\left[\frac{\varphi(s)\sigma(s)}{\delta(s)}\right]^{\lambda^2}\leqslant -V^{\Delta}(s)$$

上式两边同时乘以 $H(t,s)$，并从 T_0 到 t（$t\in[T_0,+\infty)_T$）积分，由时间测度链上的分部积分法可得

$$\int_{t_0}^{t}H(t,s)\left\{\varphi(\sigma(s))\Psi(s)-\frac{k^{-\lambda^2}r(s)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(s)}{\varphi(s)}\right]^{\lambda+1}\left[\frac{\varphi(s)\sigma(s)}{\delta(s)}\right]^{\lambda^2}\right\}\Delta s\leqslant -\int_{t_0}^{t}H(t,s)V^{\Delta}(s)\Delta s=$$

$$-[H(t,s)V(s)]_{T_0}^{t}+\int_{t_0}^{t}[H(t,s)]_s^{\Delta}V(\sigma(s))\Delta s\leqslant H(t,T_0)V(T_0)\leqslant H(t,t_0)V(T_0)$$

于是

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\left\{\varphi(\sigma(s))\Psi(s)-\frac{k^{-\lambda^2}r(s)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\left[\frac{\varphi^{\Delta}(s)}{\varphi(s)}\right]^{\lambda+1}\left[\frac{\varphi(s)\sigma(s)}{\delta(s)}\right]^{\lambda^2}\right\}\Delta s\leqslant V(T_0)$$

上式取上极限，得与（16）式矛盾！定理证毕。

注2 选择恰当的不同的函数 $H(t,s)$ 和 $\varphi(t)$，就能得到方程（1）的许多不同的具体振动准则。现在定理2中取 $H(t,s)=(t-s)^m$，$\varphi(t)=M$（$M>0$ 为常数），则得

推论2 如果存在常数 $m\geqslant 1$ 使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t^m}\int_{t_0}^{t}(t-s)^m\cdot\frac{[1-\beta B(\delta(s))]^{\lambda}[h_2(\delta(s),t_0)]^{\lambda}}{[a(\delta(s))\sigma(s)]^{\lambda}}P(s)\Delta s=+\infty$$

则方程（1）的所有解 $x(t)$ 在 $[t_0,+\infty)_T$ 上或者是振动的或者 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

此推论就是三阶微分方程的 Kamenev 型振动

准则的推广。

例 1　考虑三阶微分方程

$$\{t^3[(tx'(t))']^4\}'+t^2(t-1)^3\cdot(4t^2-11t+3)x^4(t)=0,t\geqslant 2$$

显然方程满足推论 1 的全部条件，因此由推论 1 知，方程的所有解 $x(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上或者是振动的或者 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。例如，$x(t)=e^{-t}$ 就是该方程的一个解。

例 2　考虑时间测度链上的三阶动力方程

$$\{t^{\frac{2}{3}}\phi([t(x(t)+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{t})g(x(\tau(t))))^{\Delta}]^{\Delta})\}^{\Delta}+P(t)F(\phi(x(\delta(t))))=0,t\in 2^Z,t\geqslant 2$$

这里 $t_0=2$，$r(t)=t^{\frac{2}{3}}$，$a(t)=t$，$B(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{t}$。若取 $\lambda=\frac{5}{3}$，$\tau(t)=\delta(t)=\frac{t}{2}$，$P(t)=\frac{t^{7/3}}{(s+2\sqrt{2})^{5/3}}\left[\frac{\sigma(t)}{h_2(\delta(t),t_0)}\right]^{5/3}$，$g(u)=\frac{u}{\sqrt{2+\sin^4(u+3)}}$，$F(u)=u[6+\ln^{\gamma}(1+u^2)]$，则条件 $(H_1)-(H_4)$ 显然是满足的，现取 $m=2$，注意到 $\beta=1/\sqrt{2}$，则有

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t^m}\int_{t_0}^{t}(t-s)^m\cdot\frac{[1-\beta B(\delta(s))]^{\lambda}[h_2(\delta(s),t_0)]^{\lambda}}{[a(\delta(s))\sigma(s)]^{\lambda}}P(s)\Delta s=\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}\int_2^t\frac{(t-s)^2}{s}\Delta s=$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\left\{[\log_2(t)-1]+\frac{1}{t^2}\left(\frac{t^2-2^2}{2^2-1}\right)-\frac{2}{t}(t-2)\right\}=+\infty$$

于是由推论 2 知此方程的所有解 $x(t)$ 在 $[t_0,+\infty)_T$ 上或者是振动的或者 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

参考文献：

[1] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales, an introduction with applications[M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[2] HAN Z, LI T, SUN S, et al. Oscillation criteria for third order nonlinear delay dynamic equations on time scales [J]. Ann Polon Math, 2010, 99: 143 – 156.

[3] HAN Z, LI T, SUN S, et al. Oscillation behavior of third-order neutral Emden-Fowler delay dynamic equations on time scales[J]. Adv Diff Eq, 2010: 1 – 23.

[4] HASSAN T S. Oscillation of third order nonlinear delay dynamic equations on time scales [J]. Math Comput Model, 2009, 49:1573 – 1586.

[5] ERBE L, HASSAN T S, PETERSON A. Oscillation of third order nonlinear functional dynamic equations on time scales [J]. Differential Equations Dynamical Systems, 2010,18:199 – 227.

[6] 张少艳,王其如. 一类三阶非线性时标动态方程的振动性[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2012, 51(4): 50 – 55.

[7] SAHINER Y. Oscillation of second order delay differential equations on time scales [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 2005, 63: e1073 – e1080.

[8] AGARWAL R P, BOHNER M, LI W T. Nonoscillation and oscillation: Theory for functional differential equations[M]. New York: Marcel Dekker, 2004.

[9] ERBE L, PETERSON A, SAKER S H. Hille and Nehari type criteria for third order dynamic equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 329: 112 – 131.

[10] 李同兴,韩振来,张承慧,等. 时间尺度上三阶 Emden-Fowler 动力方程的振动准则[J]. 数学物理学报, 2012, 32A(1): 222 – 232.

[11] 张全信,高丽,刘守华. 时间尺度上具阻尼项的二阶半线性时滞动力方程的振动准则(Ⅱ)[J]. 中国科学:数学,2011, 41(10): 885 – 896.

[12] 韩振来,孙书荣,张承慧. 时间尺度上二阶中立型时滞动力方程的振动性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2010,49(5):21 – 24.

[13] 杨甲山. 时间测度链上一类具阻尼项的二阶动力方程的振动准则[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(9):1529 – 1533,1538.